.Какие из следующих множеств образуют кольцо, а какие поле:

1) множество {0};

2) множество N натуральных чисел;

3) множество целых неотрицательных чисел;

4) множество целых неположительных чисел;

5) множество Z целых чисел;

6) множество 2Z четных чисел;

7) множество nZ целых чисел, кратных заданному числу n = 0 6 ;

8) множество Q рациональных чисел;

9) множество иррациональных чисел;

10) множество R вещественных чисел;

11) множество C комплексных чисел;

12) множество Z[i] целых гауссовы чисел, т. е. комплексных чисел

с целыми действительной и мнимой частями;

13) множество комплексных чисел с рациональными действитель-

ной и мнимой частями?

*1) Кольцо, но не поле.*

*2) Не является кольцом.*

*3) Не является кольцом.*

*4) Не является кольцом.*

*5) Кольцо, но не поле.*

*6) Кольцо, но не поле.*

*7) Кольцо, но не поле.*

*8) Поле.*

*9) Не является кольцом.*

*10) Поле.*

*11) Поле.*

*12) Кольцо, но не поле.*

*13) Поле.*

Какие из следующих множеств образуют кольцо, а какие поле:

1) множество чисел вида a + b√2, где a, b — целые;

2) множество чисел a + b√2, где a, b — рациональные;

3) множество чисел a + b, где a, b — целые;

4) множество чисел a + b, где a, b — рациональные;

*1) Кольцо, но не поле.*

*2) Поле.*

*3) Не является кольцом.*

*4) Не является кольцом.*

Доказать, что

при любом изоморфизме числовых полей подполе Q отображается тождественно, следовательно, поле Q обладает только тождественным автоморфизмом;

*Пусть ϕ—автоморфизм Q → Q. Имеем ϕ0 = 0, ϕ1 = 1, поэтому ϕ2 = ϕ(1+1) =*

*ϕ1+ϕ1 = 1+1 = 2, ϕ3 = ϕ(2+1) = ϕ2+ϕ1 = 2+1 = 3, . . . Следовательно, все целые неотрицательные числа отображаются тождественно. Далее, если a — целое неотрицательное, то ϕ(−a) = −ϕa. Следовательно, все целые числа отображаются тождественно. Если p, q — целые и q = 0 6 , то ϕ=. Таким образом, Q отображается тождественно.*